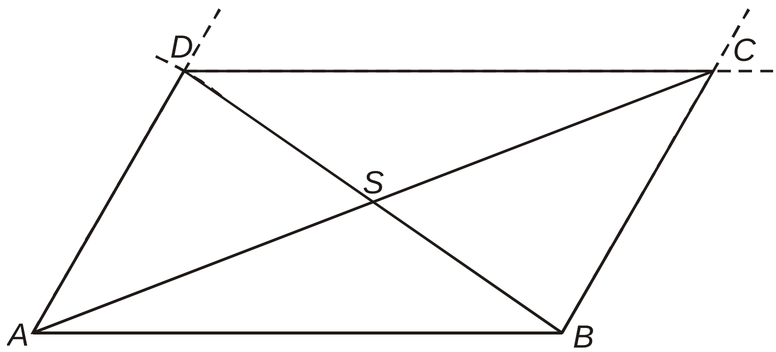
2.7.5 Rovnoběžníky

Předpoklady: 020705

Pedagogická poznámka: S příkladem 2 se příliš nezdržujeme. Většina žáků ještě s dokazováním samostatně nehne, proto kontrolujeme jednotlivé body poměrně brzo na tabuli společně.

Rovnoběžní: čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné.

Př. 1: Narýsuj libovolný rovnoběžník. Najdi co nejvíce speciálních vlastností, které má každý rovnoběžník.



Základní vlastnost rovnoběžníku: protější strany jsou rovnoběžné (odtud označení).
Další vlastnosti rovnoběžníků:

- protější strany jsou shodné (v našem případě $|AB| = |CD| = 7\text{ cm}$, $|BC| = |AD| = 4\text{ cm}$),
- protější úhly jsou shodné (v našem případě $\alpha = \gamma = 60°$, $\beta = \delta = 120°$),
- součet sousedních úhlů je $180°$ (v našem případě $\alpha + \beta = 60° + 120° = 180°$),
- průsečík úhlopříček je středem každé z nich (úhlopříčky se půlí) (v našem případě $|AS| = |SC| = 4{,}8\text{ cm}$, $|BS| = |SD| = 3\text{ cm}$),
- rovnoběžník je středově souměrný (jasné z předchozího).

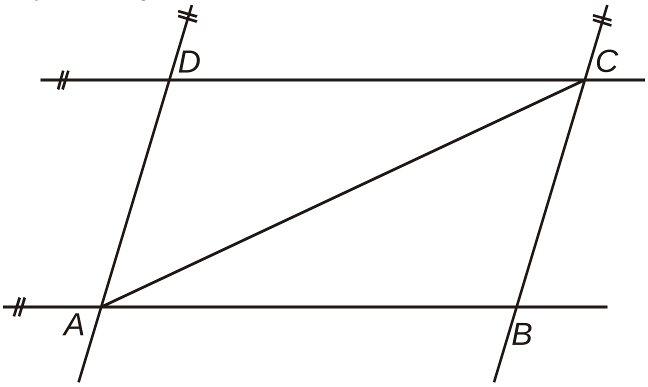
Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu samozřejmě nečekáme, že by někdo našel všechny speciální vlastnosti. Při kontrole na tabuli přidávají žáci další vlastnosti, které objevili. Zároveň si každou z uvedených vlastností ověřují na svém obrázku

Pedagogická poznámka: Pravděpodobnost, že by někdo v následujícím příkladu sám přišel na to, že musí rovnoběžník rozdělit úhlopříčkou na dva trojúhelníky, je malá. Proto příliš dlouho nečekám a poradím rozdělení rovnoběžníku na tabuli.

Př. 2: Dokaž předchozí vlastnosti rovnoběžníků v následujícím pořadí:
a) protější strany jsou shodné, b) protější úhly jsou shodné,
c) součet sousedních úhlů je $180°$, d) úhlopříčky se půlí,
e) rovnoběžník je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček.
Rada: V důkazech využívej věty o shodnosti trojúhelníků.

a) protější strany jsou shodné

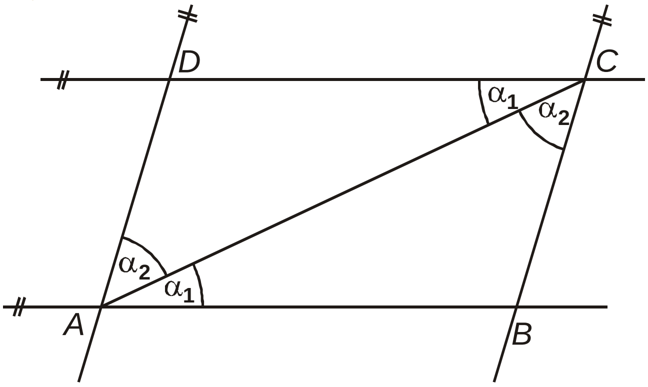
Úvaha: shodnost stran umíme dokazovat pomocí shodnosti trojúhelníků, na obrázku rovnoběžníku žádné trojúhelníky nejsou $\Rightarrow$ rozdělíme rovnoběžník úhlopříčkou na dva trojúhelníky.



Hledáme prvky, ve kterých se oba trojúhelníky shodují:

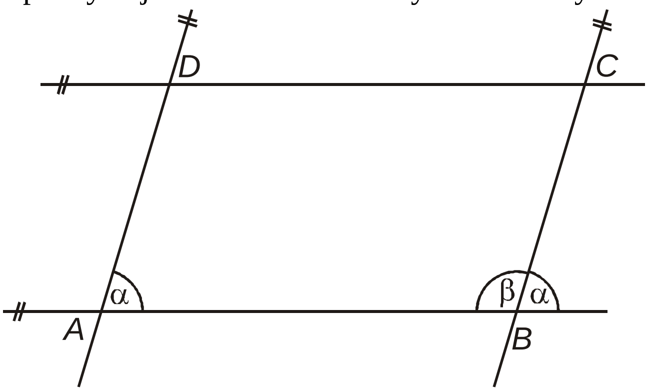
- společná strana *AC*,
- $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| = \alpha_1$ (střídavé úhly u rovnoběžek proťatých příčkou),
- $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DAC| = \alpha_2$ (střídavé úhly u rovnoběžek proťatých příčkou),

$\Rightarrow$ $ABC \cong CDA$ podle věty *usu* $\Rightarrow$ trojúhelníky se shodují i ve zbývajících stranách:
$\Rightarrow$ $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |DA|$.



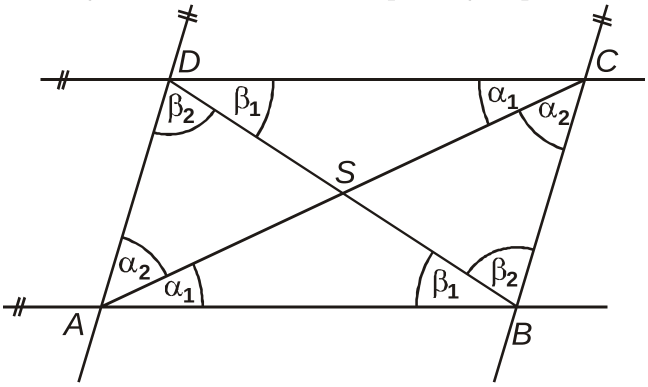
b) protější úhly jsou shodné
Využijeme obrázek z předchozího bodu.
Vidíme, že platí: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ a $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ $\Rightarrow$ $\alpha = \gamma$.
Pro úhly β a δ využijeme $ABC \cong CDA$: $\beta = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = \delta$.

c) součet sousedních úhlů je 180°
Opět využijeme větu o souhlasných a střídavých úhlech.



Velikost α mají i vnější úhly u vrcholu *B* (rovnoběžky *AD* a *BC* proťaté příčkou *AB*), úhly α a β jsou vedlejší $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 180°$.

d) úhlopříčky se půlí
Rozdělíme si rovnoběžník pomocí úhlopříček na čtyři trojúhelníky. Do obrázku dokreslíme shody v úhlech, o kterých již víme (u dvojic označených β_1 a β_2 jde opět o dvojice střídavých úhlů u rovnoběžek proťatých příčkou).



Řešíme shodnost trojúhelníků *ABS* a *CDS*:

- $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle DCS| = \alpha_1$,
- $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CDS| = \beta_1$,
- $|AB| = |CD|$ (protější strany rovnoběžníku, dokázáno v bodě a))

$\Rightarrow$ $ABS \cong CDS$ podle věty *usu* $\Rightarrow$ trojúhelníky se shodují i ve zbývajících stranách:
$\Rightarrow$ $|AS| = |CS|$ a $|BS| = |DS|$.
$\Rightarrow$ bod *S* je středem úseček *AC* a *BD* (úhlopříčky se půlí.).

e) rovnoběžník je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček
V předchozím bodu jsme dokázali, že platí:

- $|AS| = |CS|$ $\Rightarrow$ bod *C* je obrazem bodu *A* ve středové souměrnosti se středem *S* (všechny tři body leží na přímce *AC*),
- $|BS| = |DS|$ $\Rightarrow$ bod *D* je obrazem bodu *B* ve středové souměrnosti se středem *S* (všechny tři body leží na přímce *BD*),

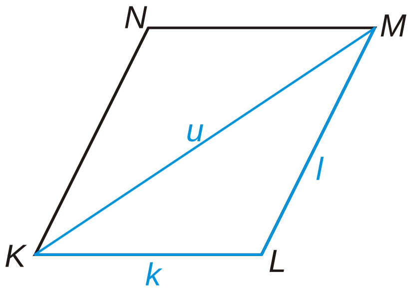
$\Rightarrow$ trojúhelník *CDS* je obrazem trojúhelníku *ABS* ve středové souměrnosti se středem *S* $\Rightarrow$ rovnoběžník *ABCD* je středově souměrný podle bodu *S*)průsečík úhlopříček).

Dodatek: V bodu b) by bylo možné postupovat pomaleji (ale obvykleji) tak, že bychom rozdělili rovnoběžník úhlopříčkou *BD* na dva trojúhelníky a postupovali analogicky s úhly α a γ.

Př. 3: Kolik údajů musíme znát o rovnoběžníku, abychom ho mohli jednoznačně sestrojit?

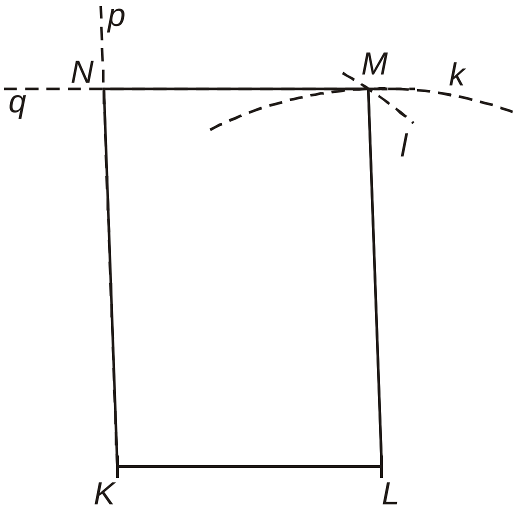
Potřebujeme znát tři údaje, například strany *a*, *b* a úhel α. Tím sestrojíme vrcholy trojúhelníku *ABD* a zbývající bod najedeme pomocí rovnoběžek nebo shodnosti protějších stran.

Př. 4: Narýsuj rovnoběžník *KLMN*, je-li dáno: $|KL| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|LM| = 5\,\text{cm}$, $|KM| = 6\,\text{cm}$.



Náčrtek:

Sestrojíme trojúhelník *KLM* a ten pak doplníme na rovnoběžník pomocí rovnoběžek.



1. KL, $|KL| = 3{,}5\text{ cm}$

2. $k(L; 5\text{ cm})$

3. $l(L; 6\text{ cm})$

4. M, průsečík kružnic k a l

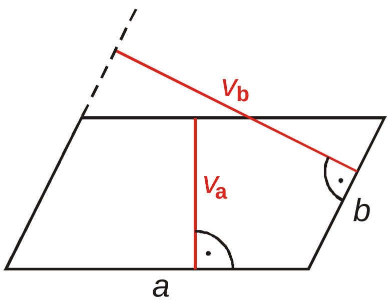
5. p, $p \parallel LM$, $K \in p$

6. q, $q \parallel KL$, $M \in q$

7. N, průsečík přímek p a q

8. Rovnoběžník *KLMN*

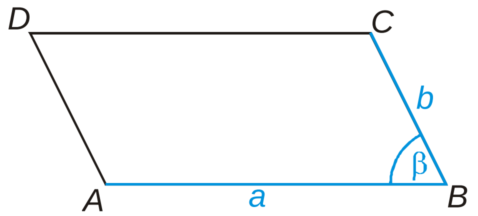
Př. 5: Nakresli libovolný rovnoběžník. Nakresli do obrázku výšku rovnoběžníku. Kolik výšek bude rovnoběžník mít?



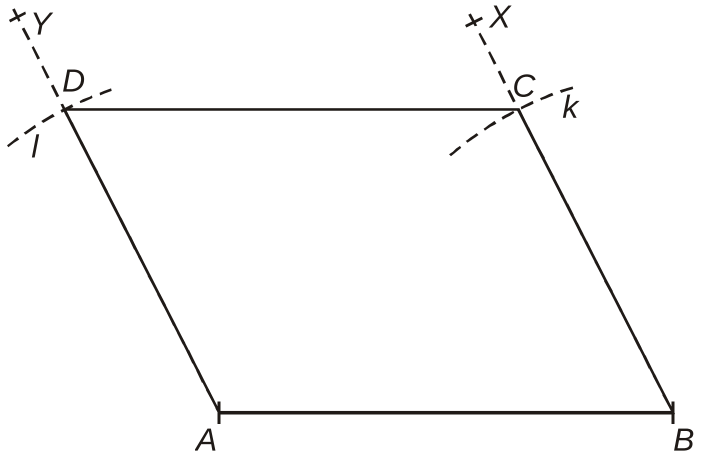
Rovnoběžník má dvě výšky, pro každou dvojici rovnoběžných stran jednu (každá z výšek udává vzájemnou vzdálenost jedné dvojice rovnoběžných stran).

Př. 6: Narýsuj rovnoběžník *ABCD*, je-li dáno $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|BC| = 4{,}5\,\text{cm}$, $\beta = 63°$. Narýsuj do rovnoběžníku obě výšky v_a a v_b. Změř jejich velikost a spočti součiny $a \cdot v_a$ a $b \cdot v_b$. Co je na výsledcích zajímavého. Vysvětli.

Náčrtek:



Velmi jednoduché. Vrchol *C* najdeme na polopřímce, která se stranou *AB* svírá úhel β.



1. AB, $|AB| = 6\text{ cm}$

2. polopřímka BX, $|\sphericalangle ABX| = 63°$

3. $k(B;\, 4{,}5\text{ cm})$

4. *C*, průsečík kružnice *k* a *BX*

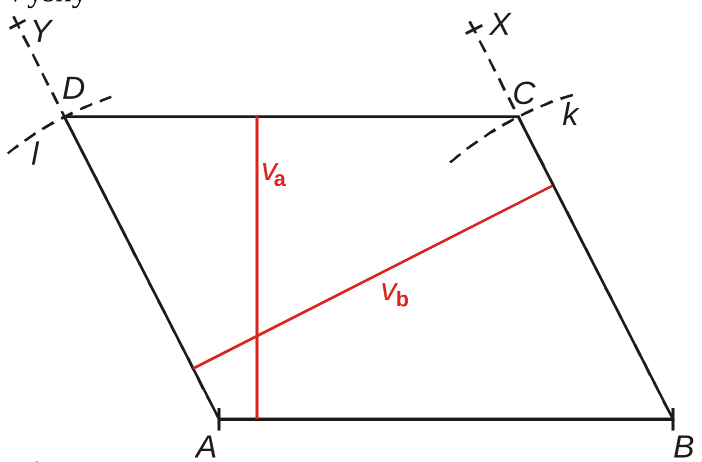
5. polopřímka *AY*, $AY \parallel BX$

6. $l(A;\, 4{,}5\text{ cm})$

7. *D*, průsečík kružnice *l* a *AY*

8. Rovnoběžník *ABCD*

Výšky

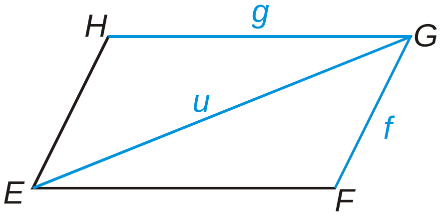


- $v_a = 4\text{ cm} \Rightarrow a \cdot v_a = 6 \cdot 4 = 24$
- $v_b = 5{,}3\text{ cm} \Rightarrow b \cdot v_b = 4{,}5 \cdot 5{,}3 = 23{,}85$

Oba výsledky jsou stejné $\Rightarrow$ pokud to není náhoda (možné ověřit na jiném rovnoběžníku), jde zřejmě o číslo, které popisuje některou z vlastností rovnoběžníku (vzhledem k tomu, že jde o součin dvou délek, zřejmě jde o jeho obsah).

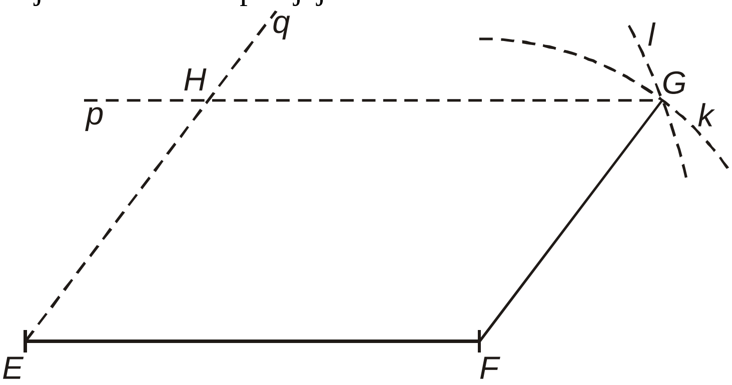
Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku se ještě nesnažíme sestavit vzorec pro obsah obdélníku (čeká nás to přespříští hodinu). Pokud ho někdo sestaví, nerozšiřujeme výsledek do zbytku třídy. pokud se někdo rozhodne, zkoumat situaci a narýsovat si jiný rovnoběžník, nebráním mu.

Př. 7: Narýsuj rovnoběžník *EFGH*, pro který platí $|EG| = 9\,\text{cm}$, $|GH| = 6\,\text{cm}$, $|FG| = 4\,\text{cm}$.



Náčrtek:

Jednoduché: stačí, když si uvědomíme, že platí $|EF| = |GH| = 6\text{ cm}$ $\Rightarrow$ můžeme narýsovat trojúhelník *EFG* a pak jej rozšířit na rovnoběžník.



1. EF, $|KL| = 6\text{ cm}$

2. $k(F; 5\text{ cm})$

3. $l(E; 9\text{ cm})$

4. G, průsečík kružnic k a l

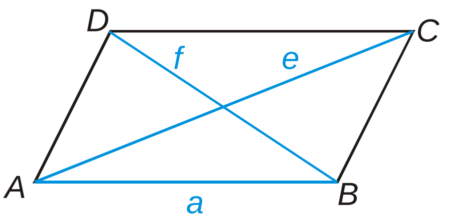
5. p, $p \parallel EF$, $G \in p$

6. q, $q \parallel FG$, $E \in q$

7. H, průsečík přímek p a q

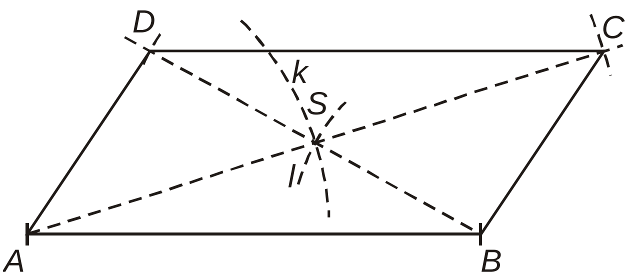
8. Rovnoběžník *EFGH*

Př. 8: Narýsuj rovnoběžník *ABCD*, pro který platí $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|AC| = 8\,\text{cm}$, $|BD| = 5\,\text{cm}$. Hledej více možných postupů.



Náčrtek:

Problém: Známe tři délky, které se však nepotkávají v jednom z vrcholů.
Řešení: Úhlopříčky se půlí $\Rightarrow$ poloviny úhlopříček můžeme využít k nalezení bodu *S* (průsečík úhlopříček). Trojúhelník *ABS* pak snadno rozšíříme na celý rovnoběžník.



1. AB, $|AB| = 6\text{ cm}$

2. $k(A; 4\text{ cm})$

3. $l(B; 2{,}5\text{ cm})$

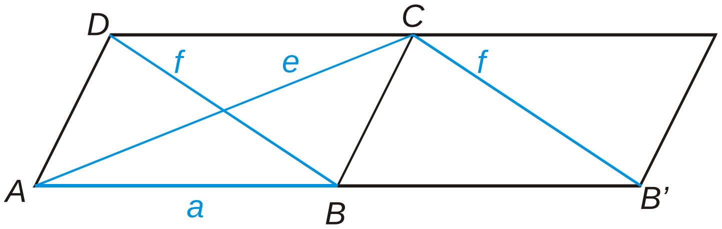
4. S, průsečík kružnic k a l

5. C, $C \in \mapsto AS$; $|AC| = 8\text{ cm}$

6. D, $D \in \mapsto BS$; $|BD| = 5\text{ cm}$

7. Rovnoběžník *ABCD*

Dodatek: Rovnoběžník je možné sestrojit i postupem zachyceným na obrázku.



Nejdříve sestrojíme podle věty *sss* trojúhelník $AB'C$, z něj již pak snadno dorýsujeme zbytek rovnoběžníku.

Shrnutí: